$E=mc^2$ の導出

01）はじめに

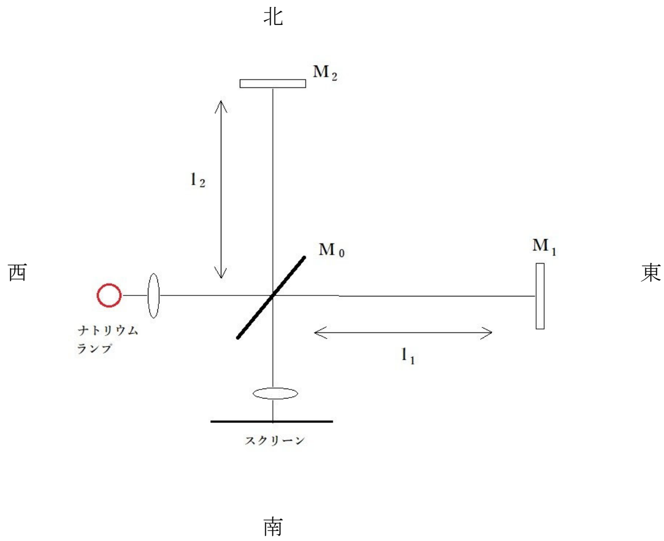
アインシュタインは1905年に発表した特殊相対性理論で、光の速度を「変わらない唯一の速度」と定義した。つまり光の速度は一定の速度の宇宙船に乗っても地上で測っても変わらない。これを光速不変の原理という。

この原理が成り立つためには、時間はどの慣性系でも同じ速度で進むという、時間空間の考え方を根本的に変えなければならない。これを理論化したのがアインシュタインの特殊相対性理論である。

しかし、このことは18年前にマイケルソン・モーレーの実験（1887年）で確認されていた。当時は、音が空気を媒体にして伝わるのと同様に、光はエーテルという媒体で進むと考えられていた。そこでマイケルソンとモーレーは地球がエーテル（つまり絶対的慣性系）に対してどのような速度で運動しているかを求める実験を行った。

マイケルソン・モーレーの実験:

地球は太陽の周りを秒速30kmで公転運動をしています。したがって、地球の進行方向とそれに垂直な方向とでは光の速さは少なくとも秒速30km程度は異なるはずである。これを検出しようと二人は考えた。



上図のように、光源から放射された光線は半透明な鏡M_0に入射し、これによって反射され鏡M_2に向かうものとまっすぐ進み鏡M_1に向かうものの二つに分岐する。鏡M_1の方向に地球はエーテル中を運動していると仮定すると、鏡M_2によって反射された光線は鏡M_0を通過しスクリーンに、また鏡M_1によって反射された光線は鏡M_0に反射され同じくスクリーンに到達して、二つの光線はスクリーン上で干渉し、その上に干渉縞を作るはずである。

次に装置全体を90度回転させて、鏡M_2の方向が地球の進行方向になるようにした。90度の回転によってこの光路差分だけ干渉縞は移動することになる。

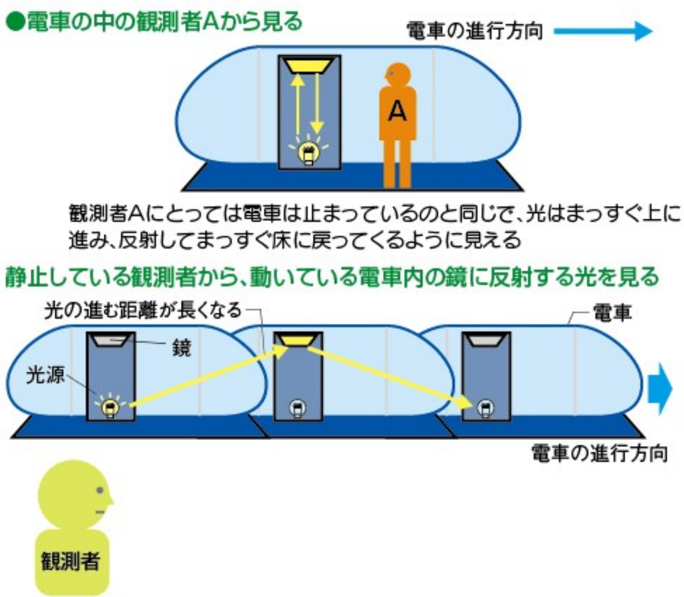
しかし、マイケルソンとモーレイの行った実験では、干渉縞は有意に移動することはなかった。また、それは季節によって変化（公転運動による地球運動の方向は冬と夏では反対方向）することもなかった。

マイケルソン・モーレイの実験は、光の速さはどの慣性系でも同じであるということが正しいことを明確に示している。これは光速がどの慣性系でも同じ値であることの実験結果である。つまり、それまで絶対的と考えられていた時間と空間が、実は伸びたり縮んだりするのではないか？とアインシュタインは考えた。

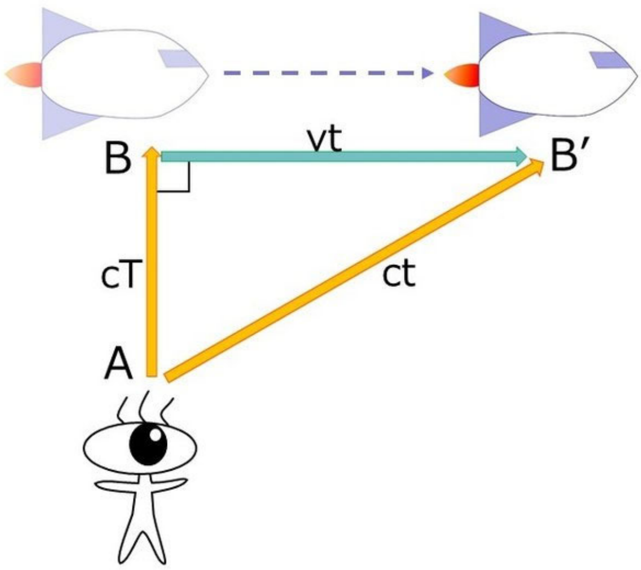
この実験から17年後、アインシュタインは電磁場を記述するマックスウェルの方程式をはじめ物理法則はすべての慣性座標系で同じであることを明確に認識し、思考実験により特殊相対性理論を作り上げた。

02)「時間の遅れ」と「空間の縮み」

*動いている電車の中と外の光の見え方



*地球にいるAさんと光速に近い速度で航行中の宇宙船に乗っているBさんの場合



v : 宇宙船の速度(km/秒)

c : 光速(約30万km/秒)

t : 地球の時間(Aさんの時間:秒)

T : 宇宙船の中の時間(Bさんの時間:秒)

ピタゴラスの定理(三平方の定理)から

$(ct)^2 = (cT)^2 + (vt)^2$ となり、T についてまとめると

$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t} \cdot \sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$ となる。

上記の式に具体的な数値を入れてみよう。光の速度は約30万km/秒、Bさん（動いている人）の宇宙船は

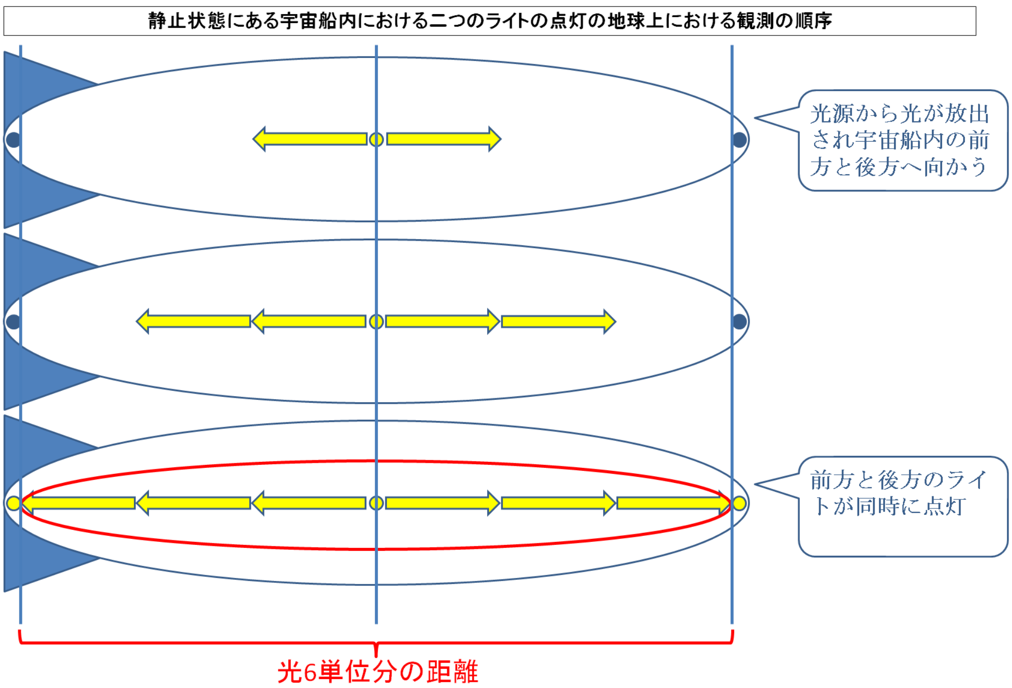
その $\frac{2}{3}$ の速さ20万km/秒で飛んでいるとする。

$$T = t\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = t\cdot\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} \fallingdotseq 0.75t$$

宇宙船の中のBさんの時間の進み具合は地球にいるAさんに比べて75％になる。つまり、地球で1時間経った時、宇宙船の中は45分しか経っていないことになる。

次に、上記のような時間の遅れと同様に、空間の収縮といった現象も生じることになり、光速に近い等速直線運動の状態にある慣性系においては物体の長さが縮むことになると考えられる

そこで、光速に近い速度で航行する宇宙船内における二つのライトの点灯の観測のされ方の違いを考える。



上図において、静止状態と光速に近い等速直線運動の状態は宇宙船内では同じである。

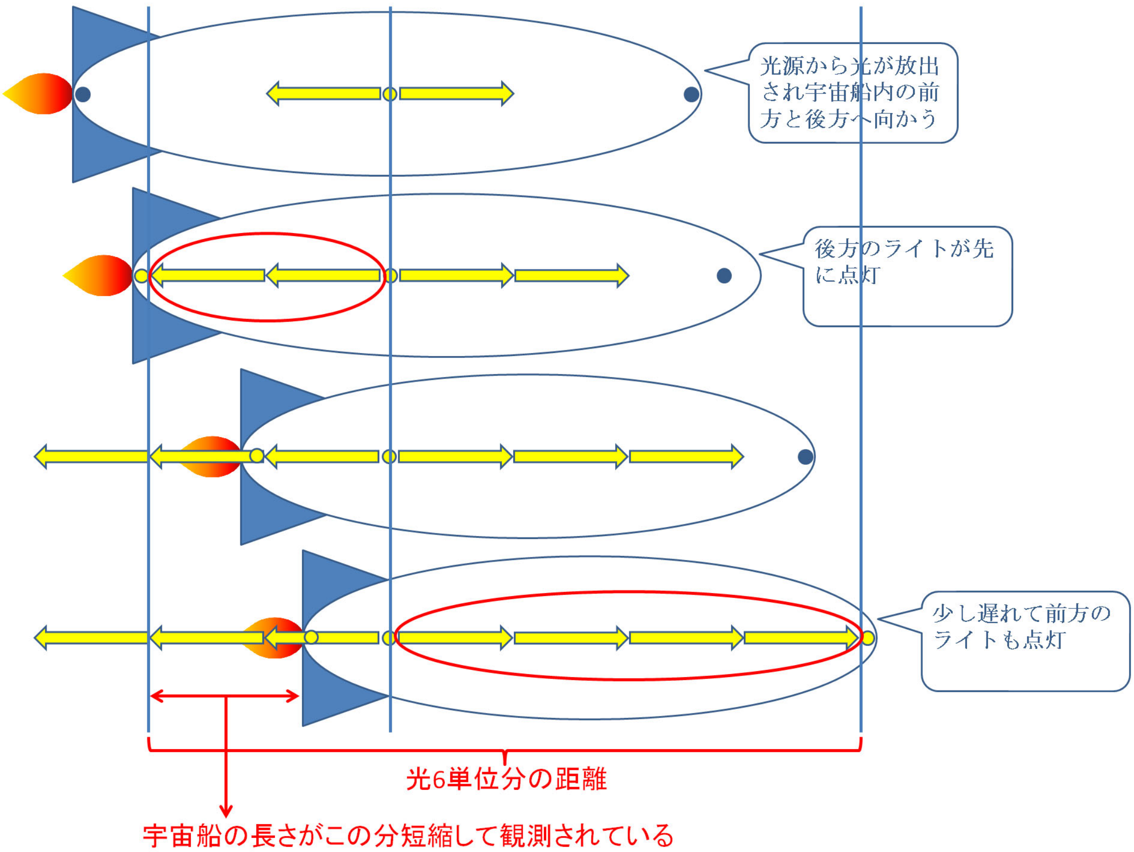
宇宙船の先頭部分からと後尾部分からの距離がぴったり同じ長さとなるように宇宙船内の中央部分に光源を配置したうえで、宇宙船の一番前の先頭部分と、一番後ろの後尾部分に上記の光源から発せられた光が到達すると発光する点灯ライトを配置する。

静止状態または光速に近い等速直線運動状態にある宇宙船内においては、中央部分の光源から発せられた光は宇宙船の前方と後方に同一時刻に到達すると考えられる。

宇宙船内の観測においては、慣性の法則に基づいて、等速直線運動の状態にある宇宙船内においても、静止状態にある場合とまったく同じ形で観測が行われることになるので、宇宙船内の観測においても、静止状態の宇宙船におけるライトの点灯の観測の場合と同様に、前方のライトと後方のライトは同時に点灯して観測されることになる。

一方、光速に近い等速直線運動状の宇宙船を地球から観測する場合、こうした宇宙船内における前方と後方のライトの点灯のあり方は、宇宙船内と地球上ではてだいぶ異なった形で観測されると考えられる。

光速に近い速度で航行する宇宙船内における二つのライトの点灯の地球上における観測の順序



上図で示したように、宇宙船の中央部分の光源から発せられた光は、光速度不変の原理に基づいて、宇宙船が静止状態にある場合と同様に、宇宙船内の前方と後方の双方へと同じ距離ずつ進み続けていくが、このとき、地球からの観測においては、光が宇宙船の前方と後方の双方へと移動している間にも、宇宙船の移動に合わせて前方と後方のライト自体も前方方向へと移動していくので、後方のライトについては、光が一定速度で近づいてくる分だけではなく、ライト自体が光源へと近づいていくことによって、宇宙船が静止状態にあるときよりもより早くライトが点灯すると考えられる。

それに対して、前方のライトについては、ライト自体が光源から遠ざかっていくことによって、宇宙船が静止状態にあるときよりもより遅くライトが点灯すると考えられる。

つまり、光速に近い速度で航行する宇宙船の船内を静止状態にある地球上から観測した場合には、宇宙船におけるライトの点灯は、宇宙船内から観測したときのように前方と後方のライトが同時に点灯するわけではなく、まず、前方のライトの方が先に点灯して、そのしばらく後になって後方のライトが点灯することになると考えられることになる。

このとき、例えば、光源からちょうど光が2単位分進んだときに後方のライトが点灯したとすると、光速度不変の原理に基づいて二つのライトが点灯するまでに光が進む距離は宇宙船が静止状態にある場合と同じく光6単位分の距離で変わりがないので、後方のライトが点灯してからさらに光が二単位分進んで合計光が四単位分進んだときに前方のライトが点灯することになり、光が進んだ合計六単位分の距離は、静止状態にある宇宙船の長さである光6単位分の長さと一致する。

この場合、光6単位分の長さは、宇宙船の後方のライトが点灯した時点における後方ライトの位置と、その後、前方のライトが点灯した時点における前方ライトの位置との距離の長さと一致するのであって、後方ライトと前方ライトの点灯が同時に観測されない以上、それは、宇宙船自体の長さとは一致しない。

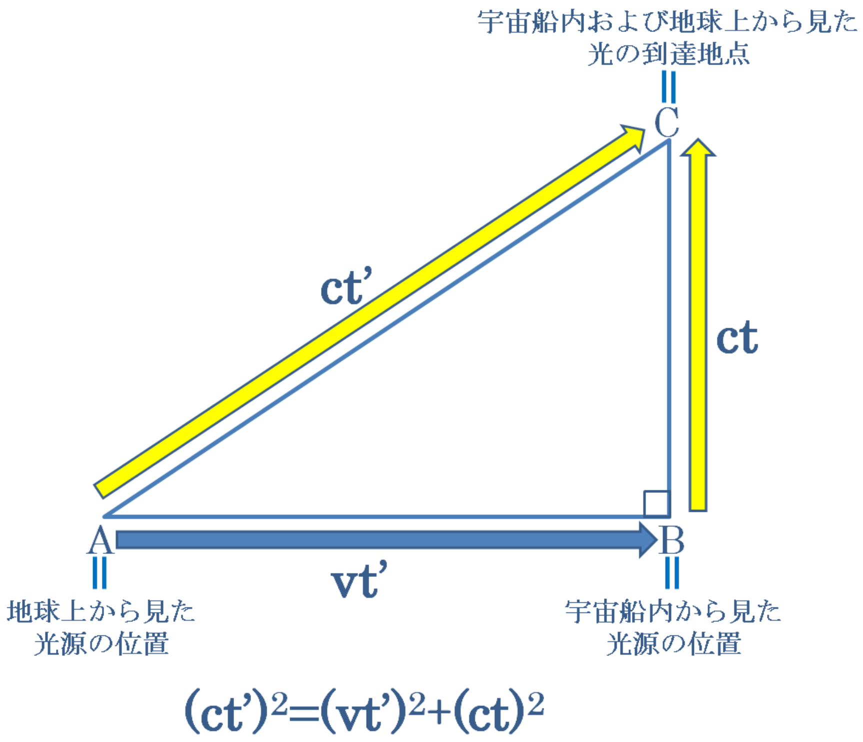
つまり、光速に近い速度で航行する宇宙船を地上から観測する場合、上記の静止状態における宇宙船の長さである光6単位分の長さは、宇宙船自体の長さではなく、後方ライトの点灯の後に前方ライトが点灯するという時間差を経て観測される光が進む距離を表すことになるのであって、後方のライトが点灯してから前方のライトが点灯するまでの時間差が生じている間に前方へと移動してしまっている宇宙船の移動距離の分だけ、地球上から

の観測においては、光速に近い速度で航行する宇宙船の長さは短縮されて観測されると考えられる。
ここで、

L ： 光速に近い速度で等速直線運動を行っている宇宙船の長さ(km)
t ： 長さ L 分の距離を光が進むのにかかる地球上の観測における時間(秒)
l ： 静止状態における宇宙船の長さ(km)
t' ： 長さ l 分の距離を光が進むのにかかる宇宙船内における時間(秒)
v ： 宇宙船の速度(km/秒)
c ： 光速（約30万km/秒）

とおくと

$L = ct$ ， $l = ct'$ 　が成り立ち、以下で示す関係式が成立する。



$(ct')^2 = (vt')^2 + (ct)^2$ 　を加工すると　$l^2 = (v \cdot \frac{l}{c})^2 + L^2$ 　となり、よって

$$L = l \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$ 　となる。

実際の数値を入れてみる。

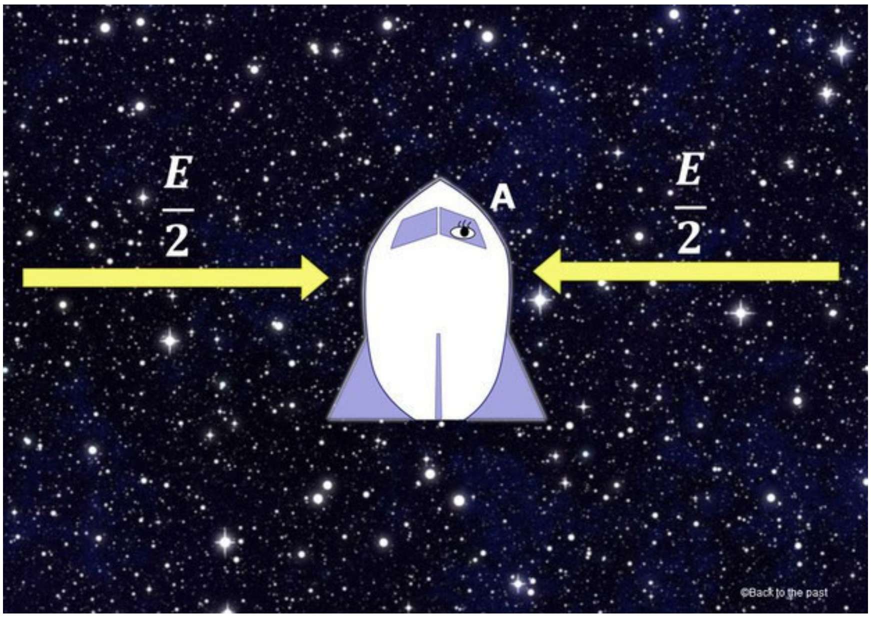
光の速度　　　$c = 300000$ （km/秒）
宇宙船の速度　$v = 180000$ （km/秒）　のとき
$L = l \times 0.8$

地球から見た場合、光速の60パーセントの速度である秒速約18万キロメートルで航行する宇宙船の長さは、静止状態における長さの0.8倍に縮んだ長さで観測されると計算される。

03)「エネルギーは質量と同じもの」

光には質量はないがエネルギーを持っているので、左右どちらかの一方から光が当たると宇宙船Aはその逆方向へ(ほんの微かだが原理的には)動いてしまう。

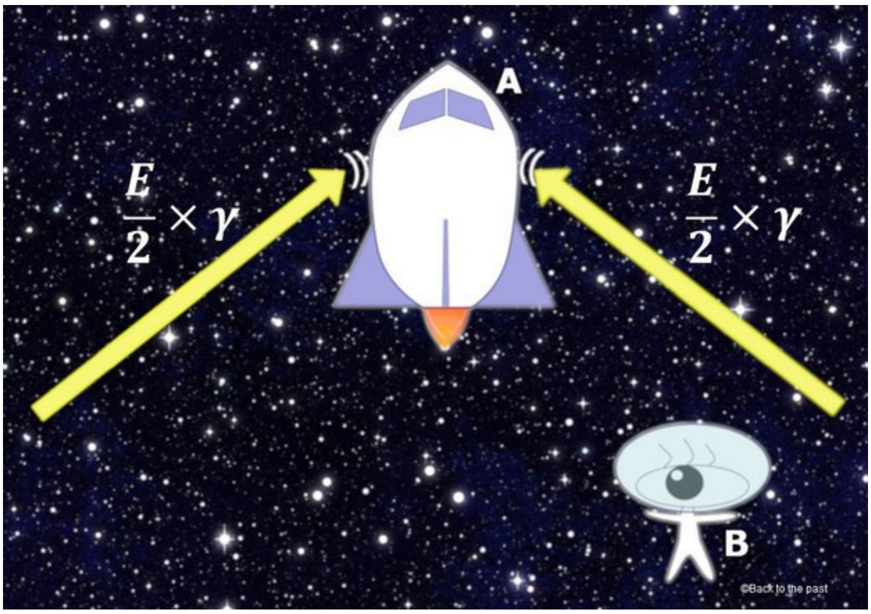
Aさんの乗った静止している宇宙船に、下図のように両側から同時に光(均等に $\frac{E_c}{2}$ のエネルギー)が当たっている場合を考えてみると、エネルギーは相殺されてしまい、宇宙船Aは動かない。



(左図中 E は E_c の誤り)

次に、宇宙船が上方向へ速度 v で等速直線運動しいているとすると、静止している観測者Bからはは光が斜めに伸びてロケットに当たっているように見えるので、宇宙船は加速するのではないか?
ところが実際は宇宙船は加速していない。

下図中 $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ とし、これはローレンツ因子(γ:ガンマ)と呼ばれている。



(左図中 E は E_c の誤り)

エネルギーは、ある形態から他の形態へ変わっても、その総量は変わらないという「エネルギー保存の法則」（熱力学の第一法則）に従えば、ロケットが動き出す前と一定の速度で動き出した後のエネルギーの総量は同じなので、動いているロケットに当たって加速させるはずのエネルギー（ΔE_c）は何かに変わっているはずだ。

$$\Delta E_c = (E_c \cdot \gamma - E_c) = E_c(\gamma - 1) = E_c\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) \cdots\cdots\cdots\cdots \text{F1}$$

式 F1 において $x = \frac{v}{c}$ とおき、x ついてマクローリン展開すると…（脚注：＊1を参照）

速度 v が光速 c に比べて十分に小さいとき、第3項以降はとても小さくなるので無視する。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \fallingdotseq 1 + \frac{1}{2}x^2 = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad \text{となる}$$

これを F1 に代入すると

$$\Delta E_c = E_c\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) \fallingdotseq E_c\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 - 1\right) = \frac{1}{2}\frac{E_c}{c^2}v^2 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{F2}$$

宇宙船 S（質量：m）の運動エネルギー $E_s = \frac{1}{2}mv^2$ において、宇宙船の速度 v は変わらないのであれば、宇宙船に当たった光のエネルギーは宇宙船を加速させるのではなく、宇宙船の重さを増やす質量になったと考えられる。したがって、宇宙船の質量の増加分を Δm とすると

$$\Delta E_c = \Delta E_s = \frac{1}{2}\Delta m v^2 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{F3}$$

式 F2 と F3 から $\Delta m = \frac{E_c}{c^2}$ さらに 光のエネルギーが物質の質量の増加に変化するのであれば、その逆も考えられるので（静止している物質のエネルギー：E とすると…）

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

これを微分形式で表すと…

$$dE = dm \cdot c^2 \quad \text{両辺を積分して} \quad \int dE = c^2 \int dm \quad \text{となり}$$

$$\boldsymbol{E = mc^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{F4}$$

が導出された。

式 F4 は静止している物質のエネルギーを示しているが、速度 v で等速直線運動をしている場合は

$$E = mc^2 \cdot \gamma = mc^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \fallingdotseq mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}\right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{となり}$$

動いている物体は静止しているときのエネルギーと運動エネルギーの両方を持っている。

以上

令和4年3月11日　どですかでん

令和4年3月12日　訂正01：等速直線運動をしている場合の式F4を追記

令和4年3月12日　訂正02：　細かい誤記、追記

=========

脚注:∗1

=========

関数 $f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(x)}{n!}x^{n}=\frac{f^{0}(0)}{0!}x^{0}+\frac{f^{1}(0)}{1!}x+\frac{f^{2}(0)}{2!}x^{2}+\frac{f^{3}(0)}{3!}x^{3}+\frac{f^{4}(0)}{4!}x^{4}+\frac{f^{5}(0)}{5!}x^{5}+\cdots$$ となる

したがって

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$ のときの、n階微分 $f^{n}(x)$ は

$$f^{0}(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}} \qquad f^{0}(0)=1$$

$$f^{1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\,(x^{2}-1)} \qquad f^{1}(0)=0$$

$$f^{2}(x)=-\frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\,(2x^{2}+1)}{x^{6}-3x^{4}+3x^{2}-1} \qquad f^{2}(0)=1$$

$$f^{3}(x)=\frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\,(6x^{3}+9x)}{x^{8}-4x^{6}+6x^{4}-4x^{2}+1} \qquad f^{3}(0)=0$$

$$f^{4}(x)=\frac{24x^{4}+72x^{2}+9}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\,(x^{8}-4x^{6}-4x^{2}+1)} \qquad f^{4}(0)=9$$

$$f^{5}(x)=-\frac{120x^{5}+600x^{3}+225x}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\,(x^{10}-5x^{8}+10x^{6}-10x^{4}+5x^{2}-1)} \qquad f^{5}(0)=0$$

$$f^{6}(x)=-\frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\,(720x^{6}+5400x^{4}+4050x^{2}+225)}{x^{14}-7x^{12}+21x^{10}-35x^{8}+35x^{6}-21x^{4}+7x^{2}-1} \qquad f^{6}(0)=225$$

$$f^{7}(x)=\frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\,(5040x^{7}+52920x^{5}+66150x^{3}+11025x)}{x^{16}-8x^{14}+28x^{12}-56x^{10}+70x^{8}-56x^{6}+28x^{4}-8x^{2}+1} \qquad f^{7}(0)=0$$

$$f^{8}(x)=\frac{40320x^{8}+564480x^{6}+1058400x^{4}+352800x^{2}+11025}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\,(x^{16}-8x^{14}+28x^{12}-56x^{10}+70x^{8}-56x^{6}+28x^{4}-8x^{2}+1)}$$

$$f^{8}(0)=11025$$

以下省略

ゆえに

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}=\frac{f^{0}(0)}{0!}x^{0}+\frac{f^{2}(0)}{2!}x^{2}+\frac{f^{4}(0)}{4!}x^{4}+\frac{f^{6}(0)}{6!}x^{6}+\frac{f^{8}(0)}{8!}x^{8}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2\cdot 1}x^{2}+\frac{9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}x^{4}+\frac{225}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}x^{6}+\frac{11025}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}x^{8}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}x^{2}+\frac{3}{8}x^{4}+\frac{5}{16}x^{6}+\frac{35}{192}x^{8}+\cdots$$ となり、第3項以降を省略すると

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\fallingdotseq 1+\frac{1}{2}x^{2}$$ となる